

©2005. И.П.Слепцова

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Для широкого класса неограниченных нецилиндрических областей рассмотрена краевая задача для линейного параболического уравнения. Доказано существование обобщенного решения данной задачи в классе функций растущих на бесконечности. Изучено характер роста решения в зависимости от геометрии области.

Краевые задачи для эволюционных уравнений в нецилиндрических областях представляют большой практический интерес. Разрешимость таких задач изучалась в ряде работ. В [1] Ж.-Л.Лионсом впервые был предложен метод штрафа для доказательства теорем существования решений параболических задач. Этот метод оказался весьма эффективным при исследовании широкого класса уравнений. Так, в [2] доказана разрешимость краевой задачи для уравнений Навье-Стокса, в [3] — для некоторых волновых уравнений. В [4] установлена единственность решений смешанных задач для некоторых вырождающихся эволюционных систем второго порядка по времени. В [5] в ограниченных по пространственным переменным нецилиндрических областях доказана однозначная разрешимость задачи Фурье для квазилинейного параболического уравнения. Отметим и другие методы, применяемые при исследовании такого класса задач. В [6] параболическая задача изучена с помощью метода регуляризации. В некоторых случаях можно заменой переменных преобразовать область в цилиндр и в нем рассматривать соответствующую задачу ([7],[8]).

В данной работе рассматривается краевая задача для линейного параболического уравнения произвольного порядка в неограниченной нецилиндрической области. В [9] в области $G \subset \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > -y(|x|)\}$ ($y(s)$ — произвольная непрерывная монотонно неубывающая функция, $y(s) > -T$) для таких задач установлены классы единственности обобщенных решений, зависящие от геометрии области G . Эти классы при $y \equiv \text{const}$ переходят в классы единственности Тихонова и Тэклинда [10]. В данной работе доказано существование обобщенных решений в области G в классах растущих функций. При этом установлена зависимость характера роста решений и допустимого роста свободных членов уравнения от свойств функции $y(s)$.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов.

Пусть $G \subset \{(x, t) : -y(|x|) < t < T\}$ — неограниченная область из $\mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$, граница которой $\partial G = \Omega_T \cup \Gamma$, Ω_T — область на гиперплоскости $t = T$, Γ — параболическая часть границы ∂G , являющаяся кусочно C^1 -гладкой гиперповерхностью. Пусть Γ такова, что для вектора внешней нормали к Γ в точке (x, t) $\nu(x, t) = \{\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_{n+1}\}$ $\nu_{n+1} \neq \pm 1$.

В области G рассматривается краевая задача

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (1)$$

$$D^\alpha u|_\Gamma = 0, \quad |\alpha| \leq m - 1. \quad (2)$$

Здесь $a_{\alpha\beta}(x, t) = a_{\beta\alpha}(x, t)$ — измеримые и ограниченные функции, удовлетворяющие

УСЛОВИЯМ

$$a_0 |\xi^{(m)}|^2 \leq \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x, t) \xi_\alpha^{(m)} \xi_\beta^{(m)} \leq a_1 |\xi^{(m)}|^2, \quad a_0 > 0, \quad a_1 < \infty, \quad (3)$$

для всех $\xi^{(m)} \in \mathbb{R}^{N(m)}$ ($N(m)$ — число различных мультииндексов длины не большей, чем m),

$$|a_{\alpha\beta}(x, t)| \leq a_2, \quad a_2 > 0, \quad |\alpha| + |\beta| \leq 2m - 1. \quad (4)$$

Обозначим $G(\tau) = G \cap \{(x, t) : |x| < \tau\}$; $G_\rho^\nu(\tau) = G(\tau) \cap \{(x, t) : \rho < t < \nu\}$, $G(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_2) \setminus G(\tau_1)$, $\Omega_{t_0} = G \cap \{t = t_0\}$, $S(\tau) = \partial G(\tau) \setminus \partial G$, $\sigma_t(\tau) = \Omega_t \cap S(\tau)$.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — ограниченная область. Через $W_2^m(\Omega_t, S_t)$, $S_t \subset \partial\Omega_t$, обозначено замыкание в норме $W_2^m(\Omega_t)$ множества C^m -гладких в Ω_t функций, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\Omega_t \setminus S_t$, через $L_2(\rho, \nu; W_2^m(\Omega_t, S_t))$ — пространство функций $v(x, t)$ таких, что для почти всех $t \in (\rho, \nu)$ $v(x, t) \in W_2^m(\Omega_t, S_t)$ и $\int_\rho^\nu \|v(\cdot, t)\|_{W_2^m(\Omega_t)} dt < \infty$.

Пусть $F_\alpha(x, t) \in L_{2,loc}(G)$, $|\alpha| \leq m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенное решение задачи (1), (2) — функция $u(x, t)$ такая, что для любого $\tau : 0 < \tau < \infty$ и любых $\rho, \nu : -y(\tau) \leq \rho < \nu \leq T$ $u(x, t) \in L_2(\rho, \nu; W_2^m(\Omega_t(\tau), \partial\Omega_t(\tau) \setminus \Gamma))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(\rho, \nu; W_2^{-m}(\Omega_t(\tau)))$ и выполнено интегральное тождество

$$\int_\rho^\nu \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle dt + \iint_{G_\rho^\nu(\tau)} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x, t) D^\alpha u D^\beta v dx dt = \iint_{G_\rho^\nu(\tau)} \sum_{|\alpha| \leq m} F_\alpha(x, t) D^\alpha v dx dt. \quad (5)$$

с произвольной функцией $v(x, t) \in L_2(\rho, \nu; W_2^m(\Omega_t(\tau), \partial\Omega_t(\tau) \setminus \Gamma))$.

Здесь $\langle w, v \rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $w \in W_2^{-m}(\Omega_t(\tau))$ на элементе $v \in W_2^m(\Omega_t(\tau), \partial\Omega_t(\tau) \setminus \Gamma)$.

Геометрию области G можно описывать с помощью численной характеристики $\lambda(t, \tau)$:

$$\lambda^2(t, \tau) = \inf_{\sigma_t(\tau)} \left(\int |\nabla_\sigma v|^2 d\sigma \right) \left(\int v^2 d\sigma \right)^{-1},$$

где $\inf$ берется по всем непрерывно дифференцируемым в окрестности σ функциям $v(x, t)$, таким, что $v = 0$ в окрестности Γ . Пусть $\Lambda(t, \tau)$ — произвольная неотрицательная измеримая функция, которая при почти всех (t, τ) удовлетворяет условию

$$\Lambda(t, \tau) \leq \lambda(t, \tau).$$

Для произвольной непрерывной функции $\mu(s) > 0$

$$\Lambda_{\mu(s)}^2(t, \tau) = \Lambda^2(t, \tau) + \mu^{2/m}(s).$$

Выберем непрерывную функцию $\psi(\tau) > 1$ таким образом, чтобы с некоторым $\tau_0 > 0$ для всех $\tau > \tau_0$ выполнялось неравенство

$$\inf_{\tau < s < \tau\psi(\tau)} \Lambda_{\mu(\tau\psi(\tau))}(t, s) \tau \varphi(\tau) = h_0(t) \geq h_0 > 0, \quad (6)$$

где $\varphi(\tau) = \psi(\tau) - 1$.

Основное условие, конкретизирующее выбор функции $\mu(\tau)$ — неравенство

$$\max(1, \mu^2(\tau)\mu^{-2}(\tau\psi(\tau))) \exp[2\mu^2(\tau\psi(\tau))(t + y(\tau\psi(\tau))) - 2\mu^2(\tau)(t + y(\tau))] \leq H_0 < \infty, \quad (7)$$

выполненное для всех $\tau > \tau_0$, $-y(\tau\psi(\tau)) < t < T$, с постоянной $1 < H_0 < \infty$, зависящей от известных параметров задачи.

Предположим, что существует число $\nu > 0$ такое, что

$$(\varphi(\tau))^{-1} \inf_{\tau < s < \tau\psi(\tau)} \varphi(s) \geq \nu > 0, \quad \tau > \tau_0. \quad (8)$$

Также считаем выполненным условие

$$\Lambda^2(t, 0, \tau) + \mu^2(\tau) \geq d_1 \tau^{-2}, \quad -y(\tau) < t < T, \quad d_1 > 0, \quad (9)$$

где $\Lambda(t, \tau_1, \tau_2) = \inf_{\tau_1 < s < \tau_2} \Lambda(t, s)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (3), (4), непрерывные функции $\mu(\tau) > 0$ и $\psi(\tau) > 1$ — условиям (6)–(8), а также условию

$$\Lambda^2(t, 0, \tau) + \mu^{2/m}(\tau) \geq h_1^2, \quad (10)$$

$h_1 > 0$ зависит от известных параметров. Пусть для функций $F_\alpha(x, t) \in L_{2,loc}(G)$, $|\alpha| \leq m$, рост на бесконечности ограничен условием

$$H_{s+1,s} \equiv \iint_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha| \leq m} F_\alpha^2(x, t) \Lambda_{\mu(\tau_s)}^{-2(m-|\alpha|)}(t, |x|) dx dt \leq M \exp \left(\gamma \int_{\tau_0}^{\tau_s} \frac{dz}{z\varphi(z)} \right), \quad (11)$$

$s \in \mathbb{N}$, $M = \text{const} < \infty$, γ удовлетворяет неравенству

$$\gamma < \nu \ln \theta^{-1}, \quad (12)$$

$0 < \theta < 1$ зависит только от известных параметров задачи, а $\{\tau_s\}$ — произвольная числовая последовательность, для которой

$$\int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \frac{dz}{z\varphi(z)} > \Delta, \quad \Delta = \text{const} > 0. \quad (13)$$

Тогда задача (1), (2) имеет обобщенное решение.

Следующее утверждение позволяет более явно характеризовать условия существования решений задачи (1), (2) в зависимости от геометрии области G .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть для произвольной функции $\Lambda(t, \tau)$ $y(s)$ растет не быстрее линейной функции, т.е., начиная с некоторого $\tau_0 > 0$, функция $Y(\tau) = \frac{\tau - \tau_0}{T + y(\tau)}$ монотонно неубывает. Пусть рост правой части уравнения (1) ограничен условием

$$\iint_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha| \leq m} F_{\alpha}^2(x, t) (Y(\tau_s))^{-\frac{2(m-|\alpha|)}{2m-1}} dx dt \leq M_1 \exp(b_1 \int_{\tau_0}^{\tau_s} Y^{\frac{1}{2m-1}}(\tau) d\tau), \quad (14)$$

где $M_1 = \text{const} < \infty$, последовательность $\{\tau_s\}$ выбирается так, чтобы

$$\int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} Y^{\frac{1}{2m-1}}(\tau) d\tau > \Delta_1, \quad \Delta_1 > 0, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

а $b_1 = \gamma h_0^{-1} [(2m-1)(4m(h_0 + \varepsilon))^{-1} \ln H_0]^{1/m}$. Тогда существует обобщенное решение задачи (1), (2).

ПРИМЕР 1. Если $y = \text{const}$, т.е. G — цилиндрическая область, то разрешимость краевой задачи (1), (2) имеет место в классах, аналогичных классам Тихонова для задачи Коши, при следующих ограничениях на рост правой части уравнения (1):

$$\iint_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha| \leq m} F_{\alpha}^2(x, t) \tau_s^{-\frac{2(m-|\alpha|)}{2m-1}} dx dt \leq M_1 \exp(b_1 \tau_s^{\frac{2m}{2m-1}}),$$

где последовательность $\{\tau_s\}$ должна удовлетворять условию $\tau_{s+1}^{\frac{2m}{2m-1}} - \tau_s^{\frac{2m}{2m-1}} > \Delta_1, s \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 2. Пусть функция $T + y(\tau)$ эквивалентна τ^{ε} , $0 < \varepsilon \leq 1$, в том смысле, что $c_1 \tau^{\varepsilon} \leq T + y(\tau) \leq c_2 \tau^{\varepsilon}$ с некоторыми положительными постоянными c_1 и c_2 . В этом случае условия (14), (15), определяющие классы разрешимости задачи (1), (2), имеют вид

$$\iint_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha| \leq m} F_{\alpha}^2(x, t) \tau_s^{-(1-\varepsilon)\frac{2(m-|\alpha|)}{2m-1}} dx dt \leq M_1 \exp(b_1 \tau_s^{\frac{2m-\varepsilon}{2m-1}}),$$

$$\tau_{s+1}^{\frac{2m-\varepsilon}{2m-1}} - \tau_s^{\frac{2m-\varepsilon}{2m-1}} > \Delta_1 > 0, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Для областей, быстро сужающихся по τ , задача (1), (2) разрешима при более быстром росте правой части уравнения (1), чем определено следствием 1, причем этот рост может быть сколь угодно большим с ростом $\Lambda(t, \tau)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функция $y(s)$ удовлетворяет условию следствия 1, $\Lambda(t, \tau) \geq Y(\tau)$, $t \in (-y(\tau), T)$. Тогда для существования обобщенного решения задачи (1), (2) достаточно, чтобы

$$\iint_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha| \leq m} F_{\alpha}^2(x, t) \Lambda^{-2(m-|\alpha|)}(t, |x|) dx dt \leq M_2 \exp(b_2 \int_{\tau_0}^{\tau_s} \Lambda(t, \tau) d\tau) \quad (16)$$

для положительной постоянной M_2 и $b_2 = \gamma h_0^{-1}$ и для последовательности $\{\tau_s\}$, удовлетворяющей неравенству

$$\int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \Lambda(t, \tau) d\tau \geq \Delta_2, \quad \Delta_2 > 0, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

ПРИМЕР 3. Пусть функция $y(\tau)$ такая же, как в примере 2, а $\Omega(\tau)$ сужается достаточно быстро, так, что $\Lambda(t, \tau) = c_3 \tau^\delta$, $\delta > (1 - \varepsilon)(2m - 1)^{-1}$. Тогда решение задачи (1), (2) существует, если правая часть уравнения (1) растет быстрее, чем в примере 2:

$$\iint_{G(\tau_{s+1})} F_\alpha^2(x, t) \tau_s^{-2(m-|\alpha|)\frac{1+\delta}{2m-1}} dx dt \leq M_2 \exp(b_2 \tau_s^{\delta+1}),$$

где $\tau_{s+1}^{\delta+1} - \tau_s^{\delta+1} \geq \Delta_2 > 0$, $s \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь область G такова, что условие (10) не выполнено. В этом случае рассмотрим уравнение вида "главной части":

$$L_0 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t) D^\beta u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in G. \quad (1^*)$$

Для удобства формулировки результатов и дальнейших доказательств видоизменим обозначения и соответствующие им условия. Пусть $0 < c_0 < \psi(\tau) < 1$, $\varphi(\tau) = 1 - \psi(\tau)$,

$$\inf_{\tau\psi(\tau) < s < \tau} \Lambda_{\mu(\tau)}(t, s) \tau \varphi(\tau) \geq h_0 > 0, \quad 0 < c_0 \leq \psi(\tau) < 1, \quad (6^*)$$

$$\max(1, \mu^2(\tau\psi(\tau))\mu^{-2}(\tau)) \exp[2\mu^2(\tau)(t+y(\tau)) - 2\mu^2(\tau\psi(\tau))(t+y(\tau\psi(\tau)))] \leq H_0 < \infty, \quad (7^*)$$

$$(\varphi(\tau))^{-1} \inf_{\tau < s < \tau\varphi^{-1}(\tau)} \varphi(s) \geq \nu > 0. \quad (8^*)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть для непрерывных функций $\mu(\tau) > 0$ и $0 < c_0 < \psi(\tau) < 1$ выполнены условия (6*)–(8*), (9). Пусть функции $F_\alpha(x, t)$, $|\alpha| \leq m$, удовлетворяют соотношениям (11) с постоянной γ из неравенства

$$\gamma < c_0 \nu \ln \theta^{-1} \quad (12^*)$$

и (13). Тогда существует обобщенное решение задачи (1*), (2).

Теорема 2 позволяет получить условия разрешимости задачи (1*), (2) в областях с образующей $y(s)$, имеющей надлинейный рост.

СЛЕДСТВИЕ 3. Утверждение теоремы 2 имеет место, если функция $y(s)$ дважды непрерывно дифференцируема, $y''(s) > 0$,

$$(y'(s)^{\frac{1}{2m-1}})' \leq \frac{\varepsilon_0(\beta - \varepsilon_0)}{m}, \quad 0 < \varepsilon_0 < \beta \equiv \frac{\ln H_0}{2h_0}, \quad \tau > \tau_0, \quad (18)$$

а рост правой части уравнения (1*) определен условием

$$\iint_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha| \leq m} F_{\alpha}^2(x, t) (y')^{-2 \frac{(m-|\alpha|)}{2m-1}} dx dt \leq M_3 \exp \left(b_3 \int_{\tau_0}^{\tau_s} (y'(\tau))^{-\frac{1}{2m-1}} d\tau \right), \quad (19)$$

где $M_3 = \text{const} > 0$, $b_3 = \gamma(\beta - \varepsilon_0)^{\frac{1}{2m-1}} h_0^{-1}$, а $\{\tau_s\}$ такова, что

$$\int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} (y'(\tau))^{-\frac{1}{2m-1}} d\tau \geq \Delta_2 > 0. \quad (20)$$

ПРИМЕР 4. Пусть функция $y(s)$ эквивалентна $s^{2m-\delta}$, $\delta > 0$. Условие (18) выполнено, т.к. $(y'(s)^{\frac{1}{2m-1}})' \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Решение задачи (1*), (2) существует, если функции $F_{\alpha}(x, t)$ имеют рост

$$\iint_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha| \leq m} F_{\alpha}^2(x, t) \tau_s^{-2(m-|\alpha|)(1-\frac{\delta}{2m-1})} dx dt \leq M_3 \exp \left(b_3 \tau_s^{\frac{\delta}{2m-1}} \right)$$

для $\tau_s : \tau_{s+1}^{\frac{\delta}{2m-1}} - \tau_s^{\frac{\delta}{2m-1}} \geq \Delta_2 > 0$, $s \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 5. Пусть $y(s) = \alpha s^{2m}$, $\alpha > 0$. Условие (18) выполнено лишь при α удовлетворяющих ограничению $\alpha \leq \frac{1}{2} m^{-2m} (\varepsilon_0(\beta - \varepsilon_0))^{2m-1}$. Задача (1*), (2) имеет обобщенное решение, если для τ_s таких, что $\tau_{s+1} \geq \tau_s \Delta_3$, $\Delta_3 > 1$, $\tau_s > \tau_0$, правая часть уравнения (1*) имеет степенной рост:

$$\iint_{G(\tau_{s+1})} \sum_{|\alpha| \leq m} F_{\alpha}^2(x, t) \tau_s^{-2(m-|\alpha|)} dx dt \leq M_4 \tau_s^{b_4}, \quad b_4 = b_3 (2m\alpha)^{-\frac{1}{2m-1}}.$$

2. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Пусть τ_s — монотонно возрастающая числовая последовательность. Определим ограниченную область $\tilde{G}_s = G_{-y(\tau_{s-1})}^T(\tau_s)$. Граница $\tilde{G}_s$ — $\partial \tilde{G}_s = \Omega_T \cup \Omega_{-y(\tau_{s-1})} \cup \Gamma_s$. Очевидно, $G = \bigcup_1^{\infty} \tilde{G}_s$.

Рассмотрим в $\{\tilde{G}_s\}$ семейство задач:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta}(x, t) D^{\beta} u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} F_{\alpha}(x, t), \quad (x, t) \in \tilde{G}_s, \quad (21)$$

$$u|_{t=-y(\tau_{s-1})} = 0, \quad (22)$$

$$D^{\alpha} u|_{\Gamma_s} = 0, \quad |\alpha| \leq m-1. \quad (23)$$

В уравнениях (21) имеются в виду сужения функций $a_{\alpha\beta}(x, t) (|\alpha|, |\beta| \leq m)$ и $F_{\alpha}(x, t) (|\alpha| \leq m)$ на область $\tilde{G}_s$ (обозначения оставлены прежние).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обобщенным решением задачи (21)–(23) назовем функцию $u(x, t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; \dot{W}_2^m(\Omega(\tau_s)))$, для которой $\frac{\partial u}{\partial t} \in (L_2(-y(\tau_{s-1}), T; W_2^{-m}(\Omega(\tau_s))))$, выполнены условия (22) и интегральное тождество

$$\int_{-y(\tau_{s-1})}^T \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \rangle dt + \iint_{\tilde{G}_s} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x, t) D^\alpha u D^\beta v dx dt = \iint_{\tilde{G}_s} \sum_{|\alpha| \leq m} F_\alpha(x, t) D^\alpha v dx dt$$

с произвольной функцией $v(x, t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; \dot{W}_2^m(\Omega(\tau_s)))$.

ЛЕММА 1. Задача (21)–(23) имеет единственное обобщенное решение для произвольных функций $F_\alpha(x, t) \in L_2(\tilde{G}_s)$, $|\alpha| \leq m$.

Доказательство леммы проведем методом штрафа. Пусть $Q = D \times (-y(\tau_{s-1}), T)$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $Q \supset \tilde{G}_s$, параболическая часть границы области Q $\partial Q = \Sigma \cup D_{-y(\tau_{s-1})}$. Пусть $\tilde{a}_{\alpha\beta}(x, t)$ и $\tilde{F}_\alpha(x, t)$ — продолжения функций $a_{\alpha\beta}(x, t)$ и $F_\alpha(x, t)$ в область Q , причем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\alpha(x, t) &= 0 \quad \text{в } Q \setminus \tilde{G}_s, \\ \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x, t) \xi_\alpha^{(m)} \xi_\beta^{(m)} &= a_0 |\xi^{(m)}|^2 \quad \text{в } Q \setminus \tilde{G}_s. \end{aligned}$$

В области Q рассмотрим задачу со штрафом

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\tilde{a}_{\alpha\beta} D^\beta u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} M u^\varepsilon = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{F}_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (24)$$

$$u^\varepsilon|_{t=-y(\tau_{s-1})} = 0, \quad (25)$$

$$D^\alpha u^\varepsilon|_\Sigma = 0, \quad |\alpha| \leq m-1. \quad (26)$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $M \in L_\infty(Q)$, $M = 0$ при $(x, t) \in \tilde{G}_s$, $M = 1$ при $(x, t) \in Q \setminus \tilde{G}_s$.

Под обобщенным решением задачи (24)–(26) будем понимать функцию

$$u^\varepsilon(x, t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; \dot{W}_2^m(D)) \cap C(-y(\tau_{s-1}), T; L_2(D)),$$

для которой $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; W_2^{-m}(D))$, выполнены условие (25) и интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_{-y(\tau_{s-1})}^T \langle \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, v \rangle dt + \iint_Q \left[\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x, t) D^\alpha u^\varepsilon D^\beta v + \frac{1}{\varepsilon} M u^\varepsilon v \right] dx dt = \\ = \iint_Q \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{F}_\alpha(x, t) D^\alpha v dx dt \end{aligned}$$

с произвольной функцией $v(x, t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; \dot{W}_2^m(D))$.

Существование и единственность решения $u^\varepsilon(x, t)$ задачи (24)–(26) доказывается, например, методом Галеркина. Для функции $u^\varepsilon(x, t)$ имеет место априорная оценка

$$\frac{1}{2} \int_\Omega (u^\varepsilon(x, T))^2 dx + \iint_Q (a_0 |D^m u^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} M u^{\varepsilon 2}) dx dt \leq c \iint_Q \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{F}_\alpha^2 dx dt,$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обобщенным решением задачи (21)–(23) назовем функцию $u(x, t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; \dot{W}_2^m(\Omega(\tau_s)))$, для которой $\frac{\partial u}{\partial t} \in (L_2(-y(\tau_{s-1}), T; W_2^{-m}(\Omega(\tau_s))))$, выполнены условия (22) и интегральное тождество

$$\int_{-y(\tau_{s-1})}^T \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \rangle dt + \iint_{\tilde{G}_s} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x, t) D^\alpha u D^\beta v dx dt = \iint_{\tilde{G}_s} \sum_{|\alpha| \leq m} F_\alpha(x, t) D^\alpha v dx dt$$

с произвольной функцией $v(x, t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; \dot{W}_2^m(\Omega(\tau_s)))$.

ЛЕММА 1. Задача (21)–(23) имеет единственное обобщенное решение для произвольных функций $F_\alpha(x, t) \in L_2(\tilde{G}_s)$, $|\alpha| \leq m$.

Доказательство леммы проведем методом штрафа. Пусть $Q = D \times (-y(\tau_{s-1}), T)$, D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $Q \supset \tilde{G}_s$, параболическая часть границы области Q $\partial Q = \Sigma \cup D_{-y(\tau_{s-1})}$. Пусть $\tilde{a}_{\alpha\beta}(x, t)$ и $\tilde{F}_\alpha(x, t)$ — продолжения функций $a_{\alpha\beta}(x, t)$ и $F_\alpha(x, t)$ в область Q , причем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\alpha(x, t) &= 0 \quad \text{в } Q \setminus \tilde{G}_s, \\ \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x, t) \xi_\alpha^{(m)} \xi_\beta^{(m)} &= a_0 |\xi^{(m)}|^2 \quad \text{в } Q \setminus \tilde{G}_s. \end{aligned}$$

В области Q рассмотрим задачу со штрафом

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\tilde{a}_{\alpha\beta} D^\beta u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} M u^\varepsilon = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{F}_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (24)$$

$$u^\varepsilon|_{t=-y(\tau_{s-1})} = 0, \quad (25)$$

$$D^\alpha u^\varepsilon|_\Sigma = 0, \quad |\alpha| \leq m-1. \quad (26)$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $M \in L_\infty(Q)$, $M = 0$ при $(x, t) \in \tilde{G}_s$, $M = 1$ при $(x, t) \in Q \setminus \tilde{G}_s$.

Под обобщенным решением задачи (24)–(26) будем понимать функцию

$$u^\varepsilon(x, t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; \dot{W}_2^m(D)) \cap C(-y(\tau_{s-1}), T; L_2(D)),$$

для которой $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; W_2^{-m}(D))$, выполнены условие (25) и интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_{-y(\tau_{s-1})}^T \langle \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, v \rangle dt + \iint_Q \left[\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x, t) D^\alpha u^\varepsilon D^\beta v + \frac{1}{\varepsilon} M u^\varepsilon v \right] dx dt = \\ = \iint_Q \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{F}_\alpha(x, t) D^\alpha v dx dt \end{aligned}$$

с произвольной функцией $v(x, t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; \dot{W}_2^m(D))$.

Существование и единственность решения $u^\varepsilon(x, t)$ задачи (24)–(26) доказывается, например, методом Галеркина. Для функции $u^\varepsilon(x, t)$ имеет место априорная оценка

$$\frac{1}{2} \int_\Omega (u^\varepsilon(x, T))^2 dx + \iint_Q (a_0 |D^m u^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} M u^{\varepsilon^2}) dx dt \leq c \iint_Q \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{F}_\alpha^2 dx dt,$$

в которой постоянная c не зависит от Q и ε . Из этой оценки следует утверждение леммы (см., например, [5]).

Пусть $u_s(x, t) \in L_2(-y(\tau_{s-1}), T; \dot{W}_2^m(\tau_s))$ — обобщенное решение задачи (21)–(23) (согласно лемме такое решение существует). Возьмем в интегральном тождестве (5) $G(\tau) = G_{-y(\tau_{s-1})}^T(\tau_{s-1}) = G_{s-1}$, $v(x, t) = u_s(x, t)g_{s-i}(t)$, $i < s$. Используя условия (3), (4), получим:

$$\begin{aligned} g_{s-i}(T) \int_{\Omega_T(\tau_{s-1})} u_s^2(x, T) dx + \iint_{G_{s-1}} (a_0 |D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t) dx dt \leq \\ \leq a_2 \iint_{G_{s-1}} \sum_{i=0}^{m-1} |D^i u_s| \sum_{j=0}^{m-1} |D^j u_s| g_{s-i}(t) dx dt + \iint_{G_{s-1}} \sum_{|\alpha| \leq m} |F_\alpha| \sum_{i=0}^{|\alpha|} |D^{|\alpha|-i} u_s| g_{s-i}(t) dx dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Из интерполяционного неравенства Ниренберга-Гальярдо ([11])

$$\int_{B_R} |D^j u|^2 dx \leq d_2 \left(\int_{B_R} |D^m u|^2 dx \right)^{j/m} \left(\int_{B_R} |u|^2 dx \right)^{\frac{m-j}{m}} + d_3 R^{-2j} \int_{B_R} u^2 dx \quad (28)$$

(здесь B_R — шар из $\mathbb{R}^n$ радиуса R , $d_2, d_3 < \infty$), неравенства Юнга, условий (9) и (10) следует оценка ([11])

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t(\tau)} |D^j u_s|^2 dx \leq \\ \leq k_1 h_1^{-2(m-j)} (d_2 + d_3 d_1^{2j}) \int_{\Omega_t(\tau)} (|D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) dx, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь и далее k_i — постоянные, зависящие лишь от m и n , c_i — постоянные, зависящие и от других параметров задачи. Соотношение (29) и неравенство Юнга позволяют получить оценку правой части неравенства (27).

$$\begin{aligned} g_{s-i}(T) \int_{\Omega_T(\tau_{s-1})} u_s^2(x, T) dx + \iint_{G_{s-1}} (a_0 |D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t) dx dt \leq \\ \leq (k_2 h_1^{-1} A_1 + \varepsilon) \iint_{G_{s-1}} (a_0 |D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t) dx dt + c_1(\varepsilon) k_3 A_2 \mathcal{H}_{s-1, s-i}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \mathcal{H}_{\tau, s} = \iint_{G_\tau} \sum_{|\alpha| \leq m} F_\alpha^2(x, t) \Lambda_{\mu(s)}^{-2(m-|\alpha|)}(t, |x|) g_s(t) dx dt,$$

$$A_1 = a_2 h_1^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} h_1^{-2(m-j-1)} (d_2 + d_3 d_1^{2j}) + a_2 \sum_{j=0}^{m-1} h_1^{-2(m-j-1)} (d_2 + d_3 d_1^{2j})^{1/2},$$

$$A_2 = \sum_{j=1}^{m-1} (d_2 + d_3 d_1^{2j}) h_1^{-2(m-j)}.$$

Из последнего неравенства видно, что постоянную h_1 можно выбрать так, чтобы для всех $s = 1, 2, \dots$, $i < s$, имела место серия оценок

$$\langle u_s \rangle_{s-1, s-i} = \iint_{G_{s-1}} (|D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t) dx dt \leq c_2 \mathcal{H}_{s-1, s-i}. \quad (30)$$

Далее используем энергетическую априорную оценку типа принципа Сен-Венана для решений однородной задачи $(1^0), (2)$ ($F_\alpha(x, t) \equiv 0, |\alpha| \leq m$) ([11]):

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи $(1^0), (2)$. Пусть для непрерывных функций $\mu(\tau) > 0$ и $\psi(\tau) > 1$ и для всех $\tau : 0 < \tau_0 < \tau < \infty$ выполнены условия (6)–(8), а также условие (10) с постоянной $h_1 > 0$, зависящей от известных параметров. Тогда для $\tau_1, \tau_2 : \tau_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \infty$ справедливо соотношение

$$I(\tau_1) \equiv \int_{-y(\tau_1)}^T \int_{\Omega_t(\tau_1)} [|D^m u|^2 + \mu^2(\tau_1) u^2] g_{\tau_1}(t) dx dt \leq \theta^{-1} \exp\left(-\nu \ln \theta^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dz}{z\varphi(z)}\right) I(\tau_2), \quad (31)$$

где $0 < \theta < 1$ зависит только от известных величин.

Обозначим $\langle u_s \rangle_k = \langle u_s \rangle_{k, k}$. Зафиксируем произвольный номер $k < \infty$ и оценим $\langle u_{k+s} - u_{k+s+s'} \rangle_{k-1}$ при $s, s' \rightarrow \infty$. В силу теоремы 3 для произвольного $s \geq 1$ в области G_{k-1} для функции $v(x, t) = u_{k+s} - u_{k+s+1}$, удовлетворяющей однородному уравнению (21^0) ($F_\alpha(x, t) \equiv 0, |\alpha| \leq m$) и условию (23), выполнено неравенство

$$\langle v \rangle_{k-1} = \langle u_{k+s} - u_{k+s+1} \rangle_{k-1} \leq \theta^{-1} \exp\left(-\nu \ln \theta^{-1} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\right) \langle u_{k+s} - u_{k+s+1} \rangle_{k+s-1}.$$

Поэтому, учитывая оценку (30), получим, что

$$\begin{aligned} \langle u_{k+s} - u_{k+s+s'} \rangle_{k-1} &\leq \sum_{i=0}^{s'-1} \langle u_{k+s+i} - u_{k+s+i+1} \rangle_{k-1} \leq \\ &\leq \theta^{-1} \sum_{i=0}^{s'-1} \exp\left(-\nu \ln \theta^{-1} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s+i-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\right) \langle u_{k+s+i} \rangle_{k+s+i-1} + \langle u_{k+s+i+1} \rangle_{k+s+i, k+s+i-1} \leq \quad (32) \\ &\leq \theta^{-1} c_2 \sum_{i=0}^{s'-1} \exp\left(-\nu \ln \theta^{-1} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s+i-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\right) (\mathcal{H}_{k+s+i-1} + \mathcal{H}_{k+s+i, k+s+i-1}) \end{aligned}$$

Рост правой части уравнения (1) определяется условием (11). Поэтому из неравен-

ства (32) следует, что

$$\begin{aligned} \langle u_{k+s} - u_{k+s+s'} \rangle_{k-1} &\leq 2\theta^{-1} c_2 M \sum_{i=0}^{s'-1} \exp\left(-\nu \ln \theta^{-1} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s+i-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\right) \exp\left(\gamma \int_{\tau_0}^{\tau_{k+s+i-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\right) \leq \\ &\leq 2c_2 M \theta^{-1} \exp\left(\gamma \int_{\tau_0}^{\tau_{k-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\right) \exp\left[(\gamma - \nu \ln \theta^{-1}) \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\right] \times \\ &\times \sum_{i=0}^{\infty} \exp\left[(\gamma - \nu \ln \theta^{-1}) \int_{\tau_{k+s-1}}^{\tau_{k+s+i-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\right]. \end{aligned}$$

Последовательность $\{\tau_s\}$ и число γ удовлетворяют условиям (12) и (13), поэтому ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \exp\left[(\gamma - \nu \ln \theta^{-1}) \int_{\tau_{k+s-1}}^{\tau_{k+s+i-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)}\right]$ сходится, $\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_{k+s-1}} \frac{dz}{z\varphi(z)} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, а значит,

$$\langle u_{k+s} - u_{k+s+s'} \rangle_{k-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } s, s' \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Из сходимостей (33) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\|u_{k+s} - u_{k+s+s'}\|_{L_2(-y(\tau_{k-1}), T; W_2^m(\Omega(\tau_{k-1})))} \rightarrow 0 \quad \text{при } s, s' \rightarrow \infty,$$

т.е. последовательность $\{u_s\}$ фундаментальна в $L_2(-y(\tau_{k-1}), T; W_2^m(\Omega(\tau_{k-1})))$ при любом $k \in \mathbb{N}$, следовательно существует функция $u(x, t) \in L_2(-y(\tau_{k-1}), T; \dot{W}_2^m(\Omega(\tau_{k-1})))$ такая, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \|u_s - u\|_{W_2^{m,0}(G', \partial G' \setminus \partial G)} = 0$ в любой ограниченной подобласти $G' = G_\rho^\nu(\tau) \subset G$. Далее, из уравнения (21) следует, что $\frac{\partial u_s}{\partial t} \in (\dot{W}_2^{m,0}(G_{k-1}))^*$, а значит, существует функция $w \in (\dot{W}_2^{m,0}(G_{k-1}))^*$: $\langle w - \frac{\partial u_s}{\partial t}, v \rangle \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ для произвольной функции $v \in \dot{W}_2^{m,0}(G_{k-1})$, т.е. $w = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Покажем, что функция $u(x, t)$ является решением задачи (1), (2). Действительно, пусть $v(x, t)$ — произвольная функция из $\dot{W}_2^{m,0}(G)$ с компактным носителем из G . Существует такой номер k_0 , что $\text{supp } v \subset \tilde{G}_k$ при всех $k \geq k_0$. В силу линейности уравнения

$$L(u, v) \equiv \langle u_t, v \rangle + \iint_G \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta v \, dx dt = L(u - u_k, v) + L(u_k, v).$$

Пусть $u_k(x, t)$ — решение задачи (21)–(23) в области $\tilde{G}_k$. Очевидно, $|L(u - u_k, v)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. С другой стороны, т.к. $\text{supp } v \subset \tilde{G}_k$, то

$$L(u_k, v) = \iint_{\tilde{G}_k} \sum_{|\alpha| \leq m} F_\alpha^2 D^\alpha v \, dx dt.$$

Следовательно, $u(x, t)$ — решение задачи (1), (2). Теорема доказана.

Для доказательства следствия 2 выберем $\mu(\tau) = \mu_1 = h_2 Y(\tau)^{m/(2m-1)}$ и $\varphi(\tau) = h_0 \tau^{-1} \mu_1^{-1/m}(\tau)$. Условия (6)–(8) выполнены с $h_2 = (2m-1)(4m(h_0 + \varepsilon))^{-1} \ln H_0$, $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого $\tau = \tau_0(\varepsilon)$ ([11]). При таких $\mu(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ условия (14) и (15) следуют из (11), (13).

Выбирая $\varphi(\tau) = h_0 \tau^{-1} \Lambda^{-1}(t, \tau)$, немедленно получим утверждение следствия 3.

Доказательство теоремы 2 в основном совпадает с доказательством теоремы 1. Поэтому укажем только отличные моменты. Пусть $u_s(x, t)$ — решение уравнения (1*) в области $\tilde{G}_s$, удовлетворяющего условиям (22), (23). Аналогом неравенства (27) в этом случае является неравенство

$$\begin{aligned} g_{s-i}(T) \int_{\Omega_T(\tau_{s-1})} u_s^2(x, T) dx + \iint_{G_{s-1}} (a_0 |D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t) dx dt \leq \\ \leq \iint_{G_{s-1}} \sum_{|\alpha| \leq m} |F_\alpha| \sum_{i=0}^{|\alpha|} |D^{|\alpha|-i} u_s| g_{s-i}(t) dx dt. \end{aligned}$$

Для оценки правой части используем неравенство Юнга с ε , неравенство (28) и условия (9) и (6*). В результате получим:

$$\begin{aligned} \iint_{G_{s-1}} (a_0 |D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t) dx dt \leq \\ \leq \varepsilon \iint_{G_{s-1}} (a_0 |D^m u_s|^2 + \mu_{s-i}^2 u_s^2) g_{s-i}(t) dx dt + k_3 c_4(\varepsilon) \sum_{j=1}^m (d_2 + d_3 h_0^{-2j}) \mathcal{H}_{s-1, s-i}, \end{aligned}$$

откуда следует оценка (30).

При оценке $\langle u_{k+s} - u_{k+s+s'} \rangle_{k-1}$ в области G_{k-1} основную роль играет утверждение типа принципа Сен-Венана ([11]):

ТЕОРЕМА 3*. Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение однородной задачи (1^{0*}), (2). Пусть для непрерывных функций $\mu(\tau) > 0$ и $0 < c_0 < \psi(\tau) < 1$ и для всех $\tau : 0 < \tau_0 < \tau < \infty$ выполнены условия (6*)–(8*), (9). Тогда для $\tau_1, \tau_2 : \tau_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \infty$ и зависящей от известных параметров постоянной $\theta \in (0, 1)$

$$I(\tau_1) \leq \theta^{-1} \exp\left(-\nu c_0 \ln \theta^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dz}{z \varphi(z)}\right) I(\tau_2).$$

Доказательство следствия 3. Условия (6*)–(8*) выполнены, если выбрать $\mu(\tau) = \mu_\varepsilon(\tau) = [(\beta - \varepsilon_0)(y'(\tau))^{-1}]^{m/(2m-1)}$, $\varphi(\tau) = h_0 \tau^{-1} [y'(\tau)(\beta - \varepsilon_0)^{-1}]^{1/(2m-1)}$ ([11]). При таких $\mu(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ условия (19), (20) следуют из (11) и (13).

ЗАМЕЧАНИЕ. Существование решений задачи (1), (2) (или (1*), (2)) с квалифицированно растущей правой частью уравнения при $|x| \rightarrow \infty$ доказано в областях $G : G \subset \Pi$, где Π — предельный параболоид: $\Pi = \{(x, t) : t > -\alpha|x|^{2m}\}$, $\alpha > 0$ зависит лишь от известных параметров.

1. Lions J.L. Une remarque sur les problemes devolution non lineaires dans des domaines non cylindriques // Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquees. - 1964. - 9. - P.11-18.
2. Fujita H., Sauer N. Construction of weak solutions of the Navier-Stokes equation in a noncylindrical domain // Bull. Amer. Math. Soc. - 1969. - 75. - P.465-468.

3. *Medeiros L.A.* Non-linear wave equations in domains with variable boundary // Arch. Rational Mech. and Anal. - 1972. - 47, №1. - P.47-58.
4. *Lavrenyuk S.P.* On the uniqueness of a solution of mixed problem for one degenerated evolutionary system // Математичні студії. - 1998. - 9, №1. - С.21-28.
5. *Bokalo M., Dmytriv V.* A Fourier problem for quasi-linear paabolic equations of arbitrary order in noncylindric domains // Математичні студії. - 2000. - 14, №2. - С.175-188.
6. *Lions J.L.* Sur les problemes mixted pour certains systemes paraboliques dans des ouverts non cylindriques // Ann. Inst. Fourier. - 1957.- 7. - P.143-182.
7. *Гасанова И.А.* Разрешимость первой краевой задачи для параболических уравнений в нецилиндрических областях // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат.наук. - 1988. - №1. С.34-39.
8. *Кожанов А.И., Ларькин Н.А.* Волновое уравнение с нелинейной диссипацией в нецилиндрических областях // Докл.РАН. - 2000. - 374, №1. - С.17-19.
9. *Шшиков А.Е.* Классы единственности обобщенных решений краевых задач для параболических уравнений в неограниченных нецилиндрических областях // Диф.уравнения. - 1990. - 26, №9. - С.1627-1633.
10. *Олейник О.А., Раджевич Е.В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // УМН. - 1978. - 33, в.5. - С.7-73.
11. *Шшиков А.Е.* Принцип Сен-Венана для квазилинейных дивергентных параболических уравнений высокого порядка и его приложения - Киев. - 1987. - 40с. - (Препринт/ Ин-т математики АН УССР; 87.23.)

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24
83055, Донецк, Украина

Получено 14.10.2004